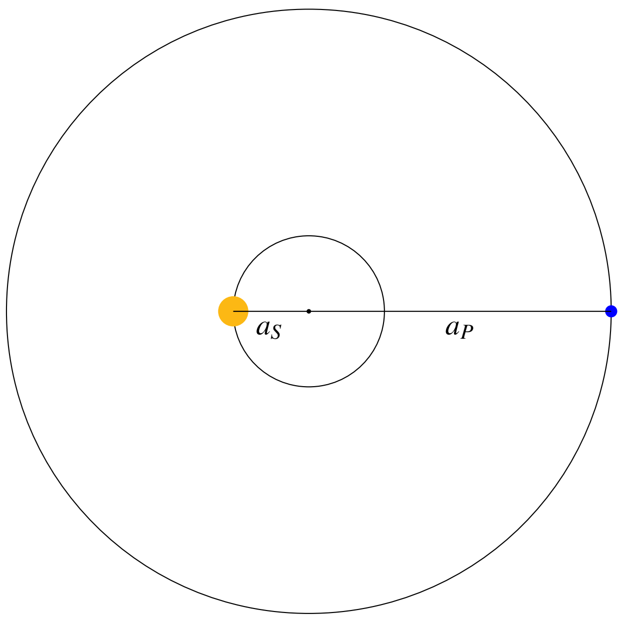
Handout zum Exoplaneten-Nachweis

Markus Pössel

Sonnensystem für Nichtphysiker, WS 2018/2019

1 Stern und Planet

Betrachten wir einen Stern mit Masse M_S und einen Planeten mit Masse M_P, die sich umkreisen. Der Einfachheit halber mögen sich beide auf Kreisbahnen bewegen; die Geometrie ist hier zu sehen:



Der (konstante) Abstand des Planeten vom Mittelpunkt des Systems sei dabei a_P, der Abstand des Sterns vom Systemmittelpunkt a_S. Stern und Planet stehen jeweils auf direkt gegenüberliegenden Seiten des Systemmittelpunkts, haben also insbesondere dieselbe Umlaufzeit P. Die Geschwindigkeiten von Stern und Planet ergeben sich damit zu

$$v_S = \frac{2\pi a_S}{P} \quad \text{und} \quad v_P = \frac{2\pi a_P}{P}, \tag{1}$$

jeweils als das Verhältnis der Bahnlänge (Kreisumfang) zur Umlaufzeit.

Die Gravitationsanziehung zwischen den beiden Körpern ist nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz gegeben durch

$$F_G = \frac{G M_S M_P}{(a_S + a_P)^2}. \tag{2}$$

Die Bewegung auf der Kreisbahn bedeutet, dass der Stern eine (Zentripetal-)Beschleunigung hin zum Mittelpunkt der Stärke

$$b_{ZPS} = \frac{v_S^2}{a_S} = 4\pi^2 \frac{a_S}{P^2} \tag{3}$$

erfährt. Diese Beschleunigung wird durch die Gravitationskraft hervorgerufen; es muss also gelten

$$4\pi^2 \frac{a_S}{P} = \frac{1}{M_S} \frac{G M_S M_P}{(a_S + a_P)^2}, \tag{4}$$

also

$$a_S M_S = \frac{P^2}{4\pi^2} \frac{G M_S M_P}{(a_S + a_P)^2}. \tag{5}$$

Dieselbe Ableitung können wir für den Planeten vornehmen; auch für den Planeten muss gelten

$$a_P M_P = \frac{P^2}{4\pi^2} \frac{G M_S M_P}{(a_S + a_P)^2}. \tag{6}$$

Als erstes Ergebnis erhalten wir also schon einmal

$$a_S M_S = a_P M_P. \tag{7}$$

Das bestätigt, was wir uns auch anderweitig hätten denken können: dass nämlich Stern und Planet um den gemeinsamen Massenschwerpunkt kreisen, und dass ihre Abstände von jenem Schwerpunkt sich umgekehrt proportional zu ihren Massen verhalten,

$$\frac{a_S}{a_P} = \frac{M_P}{M_S} \tag{8}$$

— ganz analog zu zwei Menschen auf einer Wippe, bei denen im Gleichgewichtszustand der massereichere Mensch schließlich auch näher an der Wippachse sitzen muss.

Auch das dritte Keplersche Gesetz für die hier betrachtete Situation können wir ableiten. Dazu teilen wir Gleichung (5) durch M_S und Gleichung (6) durch M_P, zählen die Ergebnisse zusammen und erhalten auf diese Weise

$$a_S + a_P = \frac{P^2}{4\pi^2} \frac{G(M_S + M_P)}{(a_S + a_P)^2}, \tag{9}$$

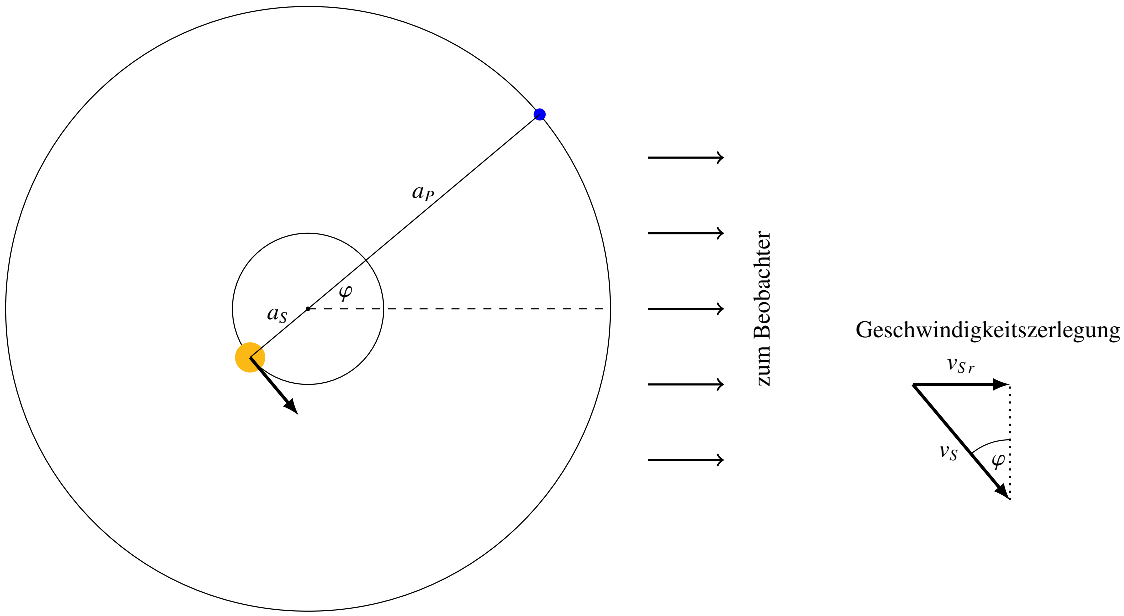
was sich direkt umschreiben lässt zu

$$(a_S + a_P)^3 = \frac{G(M_S + M_P)}{4\pi^2} P^2, \tag{10}$$

als die hier anwendbare Form des dritten Keplerschen Gesetzes.

2 Radialgeschwindigkeit

Die Radialgeschwindigkeit des Sterns können wir über den Dopplereffekt messen — klar definierte Spektrallinien des Sterns verschieben sich hin zum roten Bereich, wenn sich der Stern von uns entfernt, und zum blauen Bereich, wenn er auf uns zu kommt. Würden wir direkt von der Seite auf die Bahnebene des Systems sehen, dann würde die Radialgeschwindigkeit lediglich von der Bahngeschwindigkeit v_S des Sterns und vom Positionswinkel abhängen, wie die folgende Skizze zeigt:



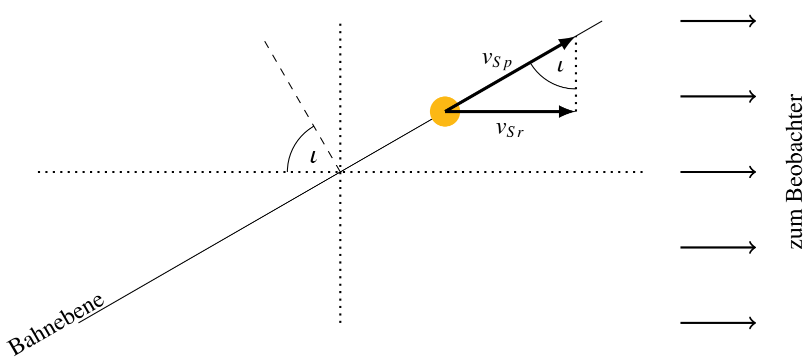
Der Beobachter ist in dieser Skizze weit entfernt auf der rechten Seite. Die Radialgeschwindigkeit des Sterns $v_{S\,r}$ ist die Geschwindigkeit des Sterns, projiziert auf die Richtung vom Systemmittelpunkt zum Beobachter; in unserer Skizze ist das die waagerechte Richtung. Wie die Geschwindigkeitszerlegung im rechten Teil der Skizze zeigt, ist

$$v_{S\,r} = v_S \cdot \sin(\varphi). \tag{11}$$

Der Positionswinkel φ verändert sich mit der Zeit als

$$\varphi(t) = \frac{2\pi}{P} \cdot t + \varphi_0, \tag{12}$$

und entsprechend verändert sich auch die Radialgeschwindigkeit kosinusartig mit der Zeit. Das gilt allerdings in der hier angegebenen Form nur, wenn der Beobachter die Umlaufebene tatsächlich genau von der Seite aus betrachtet. Ist die Umlaufebene geneigt, dann kommt ein weiterer (konstanter) geometrischer Faktor hinzu. Die folgende Abbildung zeigt die Umlaufebene und die Richtung hin zum Beobachter von der Seite. Der Winkel ι (Iota) heißt *Inklination(swinkel)* oder *Bahnneigung(swinkel)*.



Für $\iota = 90°$ sieht der Beobachter direkt von der Kante auf die Umlaufebene, für $\iota = 0°$ direkt ("face on") auf die Ebene.

Das $v_{S\,p}$ ist die Geschwindigkeitskomponente in der Umlaufebene. Wie das Vektordiagramm zeigt, ergibt sich durch die Bahnneigung ein weiterer Faktor $\sin\iota$. Insgesamt ergibt sich für die Radialgeschwindigkeit der Verlauf

$$v_{S\,r} = v_S \sin\left[\frac{2\pi}{P}\cdot t + \varphi_0\right]\cdot \sin\iota. \tag{13}$$

3 Radialgeschwindigkeitsmethode

Aus großer Entfernung können wir kein aufgelöstes Bild des Systems gewinnen, also kein Bild, auf dem der Stern, der Planet und deren Abstand zueinander direkt sichtbar wären. Stattdessen können wir lediglich Messungen am Stern selbst vornehmen; der Planet ist in den meisten Fällen beim heutigen Stand der Technik unsichtbar (denken Sie an das Beispiel Stadionscheinwerfer versus Glühwürmchen aus der Vorlesung).

In einer ganzen Reihe von Fällen lässt sich die Radialgeschwindigkeit des Sterns über den Dopplereffekt nachweisen, also denjenigen Anteil seiner Bewegung, der den Stern direkt auf uns zu oder direkt von uns weg führt. Die Radialgeschwindigkeit wird sich im einfachsten Falle, wo nur ein Planet anwesend ist, periodisch verändern. Bereits daraus können wir eine wichtige Beobachtungsgröße bestimmen, nämlich die Umlaufzeit P.

Die Radialgeschwindigkeitsmethode zum Nachweis von Exoplaneten macht sich genau diesen Umstand zunutze. Über den Dopplereffekt lässt sich der Geschwindigkeitsverlauf (13) rekonstruieren und damit auch die Größe $v_S \cdot \sin\iota$.

Dabei können wir v_S direkt durch Kenngrößen des Systems ausdrücken. Aus (8) folgt

$$(a_S + a_P) = \frac{a_S}{M_P}(M_S + M_P). \tag{14}$$

Die Größe a_S können wir durch v_S ersetzen, siehe Gleichung (1). Eingesetzt in das dritte Keplersche Gesetz (10) erhalten wir

$$v_S = \left(\frac{2\pi G}{P}\right)^{1/3} \frac{M_P}{(M_S + M_P)^{2/3}}. \tag{15}$$

Wir können diesen Ausdruck umschreiben, so dass die Größenordnungen klarer werden:

$$v_S \approx 100\text{ m/s}\left(\frac{M_P}{M_J}\right)\cdot\left(\frac{10\text{ Tage}}{P}\right)^{1/3}\cdot\left(\frac{M_S + M_P}{M_\odot}\right)^{-2/3} \tag{16}$$

$$\approx 10\text{ cm/s}\left(\frac{M_P}{M_\oplus}\right)\cdot\left(\frac{1\text{ Jahr}}{P}\right)^{1/3}\cdot\left(\frac{M_S + M_P}{M_\odot}\right)^{-2/3}. \tag{17}$$

Dabei ist M_J die Jupitermasse und $M_\oplus$ die Erdmasse. Die besten heutigen Spektrografen können Radialgeschwindigkeiten von ~ 1 m/s nachweisen (HARPS, CARMENES). Kein Wunder, dass man auf diese Weise anfangs so viele heiße (=ihrem Stern nahe) Jupiter gefunden hat.

Indem man den zeitlichen Verlauf der Radialgeschwindigkeit (13) verfolgt, kann man die Amplitude $v_{Sa} = v_S \cdot \sin\iota$ bestimmen. Das wiederum lässt sich mit der Formel (15) auflösen zu

$$M_P \cdot \sin\iota = v_{Sa} \cdot (M_S + M_P)^{2/3} \left(\frac{P}{2\pi G}\right)^{1/3} \approx v_{Sa} \cdot M_S^{2/3} \left(\frac{P}{2\pi G}\right)^{1/3}. \qquad (18)$$

Die letzte Näherung können wir vornehmen, weil Planetenmassen typischerweise sehr viel kleiner sind als Sternmassen. (In unserem Sonnensystem besitzt die Sonne mehr als tausend Jupitermassen.) v_{Sa} und P lassen sich messen. Aus dem Spektrum eines (Hauptreihen-)Sterns lässt sich sich seine Masse erschließen.

Mit Hilfe der Radialgeschwindigkeitsmethode ergibt sich dementsprechend eine Abschätzung für $M_P \cdot \sin\iota$. Da $\sin\iota$ zwischen 0 und 1 liegt, setzt $M_P \cdot \sin\iota$ eine Untergrenze für die Planetenmasse M_P.