

Einfache Modelle für astronomische Objekte I

Methoden der Astronomie für Nicht-Physiker

Björn Malte Schäfer & Markus Pössel

Astronomisches Rechen-Institut/Haus der Astronomie

20.10.2016 – 26.1.2017

Strukturmodelle für astronomische Objekte

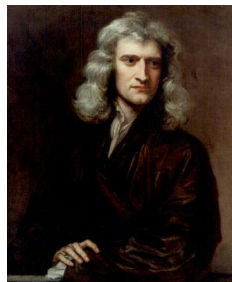
- 1 Sich umkreisende Konfigurationen
- 2 Festkörper (Quanteneigenschaften)
- 3 Flußgleichgewicht / thermischer Druck (in Teil 2)

Die Newton'sche Revolution

Mechanischer Rahmen, Gravitation als Kraft:
Allgemeine Bewegungsgesetze

Irdisches und Himmlisches sind nicht getrennt:
Apfel ~ Mond

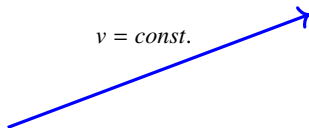
Neues Modell für die Differenzialgleichungen
(= Naturgesetze bestimmen Änderungsraten)
plus Anfangsbedingungen



Isaac Newton (1642-1727)
by Sir Godfrey Kneller via
Wikimedia Commons

Newton'sche Mechanik

Natürlicher (=freier) Bewegungszustand: Geradlinige, gleichförmige Bewegung (Obacht: in geeignetem Bezugssystem)



Abweichungen von der freien Bewegung entsteht durch Einfluss von Kräften,

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

mit \vec{a} der Beschleunigung (also Änderung des Geschwindigkeitsbetrags ebenso wie der Richtung der Geschwindigkeit).

Newton'sche Mechanik

Teil der Mechanik: Explizite Modelle für verschiedene Arten von Kraft (Gravitation, Elektrodynamik, Reibungskräfte) – wie üben Körper etc. aufeinander Einflüsse aus?

Geeignete Wahl des Bezugssystems (Inertialsystem) beinhaltet: Unterscheidung von „richtigen Kräften“ und Trägheitskräften (d.h. solchen, die sich alleine durch die Wahl des Bezugssystems zum Verschwinden bringen lassen: Zentrifugalkraft, Corioliskraft, Eulerkraft)

Newton'sche Gravitation

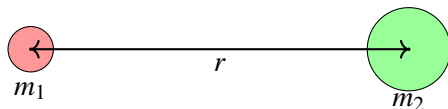
Newtons Gesetz für die Schwerkraft (Gravitation): Zwei Punktmassen m_1 , m_2 im Abstand r voneinander ziehen sich mit einer Kraft der Stärke

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

an.

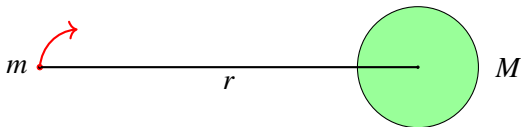
G ist die Newtonsche Gravitationskonstante,

$$G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 / (\text{kg} \cdot \text{s}^2).$$



Newton'sche Gravitation

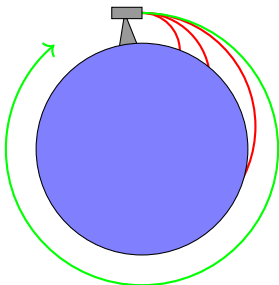
Häufige Situation: $m = m_2 \ll m_1 = M$; die Punktmasse m ist ein „Testteilchen“, mit dessen Hilfe man das *Gravitationsfeld* (\sim Einfluss auf alle denkbaren Testteilchen) eines größeren Körpers der Masse M kartiert.



Beispiel: Gravitationsbewegung/-statik im Schwerefeld der Erde (irdische Körper) oder im Schwerefeld der Sonne (Planeten, Kometen).

Newton'sche Gravitation

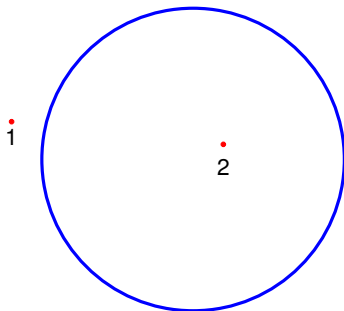
Vereinigung irdisches und himmlisches: Kanonenkuglexperiment



Bei Vernachlässigung von Reibung: Fallkurven (Kanonenkugel) und Umlaufbahn gehen direkt ineinander über!

Newton'sche Gravitation

Allgemeine Rechnung zur Gravitationskraft einer Kugelschale
(Beiträge aufsummieren):

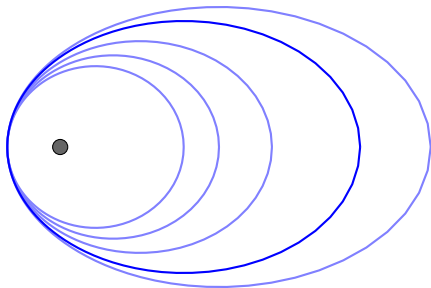


Kraft der hohlkugelförmigen Masseverteilung (blau) auf
Testteilchen innerhalb (z.B. 2): Null! ... auf Testteilchen außerhalb:
als sei die Gesamtmasse im Zentrum der Kugel konzentriert.

Keplersche Gesetze der Planetenbewegung

Allgemein gilt für Kleinkörper A , der massereichen Körper B umkreist (Zweikörperproblem, exakt lösbar):

- 1 Körper A bewegt sich auf Ellipse, in deren einem Brennpunkt B steht
- 2 Verbindungsstrahl von A zu B überstreicht auf der Ellipse in gleichen Zeiten gleiche Flächen
- 3 Verschiedene Kleinkörper i umkreisen B :
 $(T_1/T_2)^2 = (a_1/a_2)^3$ mit a der jeweiligen großen Halbachse, T der Umlaufzeit



Newton'sche Gravitation und Kepler

108 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

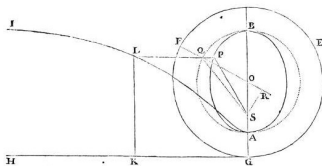
DE MOTU
CORPORUM

rum puncta omnia per longitudines æquationibus definitas, id est, per longitudinum rationes complicatas, determinari possunt; cæterasque (ut spirales, quadratrices, trochoides) geometricè irracionales. Nam longitudines quæ sunt vel non sunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo elementorum) sunt arithmetice rationales vel irracionales. Aream igitur ellipsec temporì proportionalem abscindo per curvam geometricè irracionalem ut sequitur.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XXIII.

Corporis in data trajectory elliptica moti invenire locum ad tempus assignatum.

Ellipseos APB sit A vertex principalis, S umbilicus, & O centrum, sitque P corporis locus inveniendus. Produc OA ad G , ut fit OG ad OA ut OA ad OS . Erige perpendiculum GH , centroque O & intervallo OG describe circulum GEF , & super regula GH , ceu fundo, progrediatur rota GEF revolendo circa axem suum, & interea puncto suo A describendo trochoidem ALI . Quo facto, cape GK in ratione ad rotæ perimetrum $GEFG$, ut



est tempus, quo corpus progrediendo ab A descripsit arcum AP , ad tempus revolutionis unius in ellipfi. Erigatur perpendiculum KL occurrens trochoidi in L , & acta LP ipsi KG parallela occurret ellipfi in corporis loco quaesito P .

Nam

Newton (*Principia*, 1687) kann die Kepler'schen Gesetze ableiten – und im 3. Gesetz die Konstante bestimmen:

$$T^2 = a^3 \frac{4\pi^2}{GM}.$$

(Daraus auch Sonnenmasse!)

Newton'sche Gravitation



Bild: NASA/W. Liller

Neu bei Newton: Auch offene Bahnen (ebenfalls Kegelschnitte: Hyperbel und Parabel)

Bahnrechnungen: Bahnbestimmung von Kometen möglich:
Halley'scher Komet, benannt nach Halleys Vorhersage für 1758

Newton'sche Gravitation

Erstmals bei Newton: Möglichkeit, Störungsrechnung durchzuführen (Gauß 1800).

$$\vec{F}_{\text{gesamt}} = \vec{F}_{\text{Sonne}} + \vec{F}_{\text{Jupiter}} + \vec{F}_{\text{Saturn}} + \dots$$

Allgemeines Verfahren: Finde eine Lösung, die nur den größten Beitrag berücksichtigt. Füge zu dieser Lösung Korrekturen hinzu, die der Reihe nach die weniger großen Kraftbeiträge berücksichtigen.

Großer Erfolg: Urbain Le Verrier (John Couch Adams) sagen 1846 Planet Neptun vorher, Entdeckung durch Johann Gottfried Galle binnen eines Monats.

Newton'sche Gravitation: Einfache Bewegungen

Kepler-Gesetze erlauben Rückschlüsse auf Massen!

Beispiel: Kreisbahn mit Radius a . Bahngeschwindigkeit v ist

$$v = \frac{2\pi a}{T}$$

Mit 3. Keplerschem Gesetz:

$$M = \frac{1}{2\pi G} v^3 T.$$

Wenn Planetenbahn direkt von der Seite gesehen (z.B. Transit), lässt sich v direkt mittels Dopplereffekt messen.

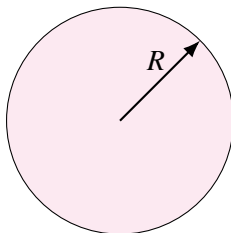
(Allgemeinere Formeln: Masse beider Körper gehen ein; Exoplaneten: Dopplereffekt nur auf Stern anwendbar, kreisen um gemeinsamen Schwerpunkt.)

Bewegung in Masseverteilung

Modell: Kleiner Körper bewegt sich in größerer, kugelförmiger Masseverteilung.

Gesucht: Bahngeschwindigkeit in Abhängigkeit vom Abstand r vom Zentrum

Masseverteilung: homogen bis Abstand R , danach zuende



Bewegung in Masseverteilung

Wir betrachten wieder Kreisbahnen mit Radius a . Wichtig: Bei $a < R$ trägt nur die innere Masse bei:

$$M(a) = \begin{cases} M \cdot \left(\frac{a}{R}\right)^3 & a \leq R \\ M & a > R \end{cases}$$

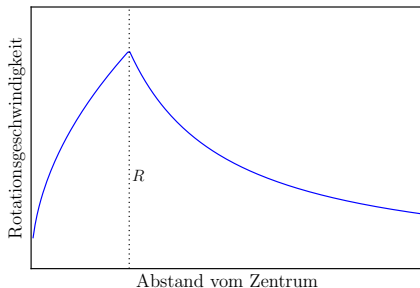
In Kepler-Gesetz, ersetze T durch v :

$$v(a) = \sqrt{\frac{GM(a)}{a}}$$

Wiederum einfachster Fall: Bahn von der Seite betrachten, v mit Dopplereffekt messen

Beispiel: Scheibe von der Seite

Einfachster Fall: Kugel konstanter Dichte mit Radius R

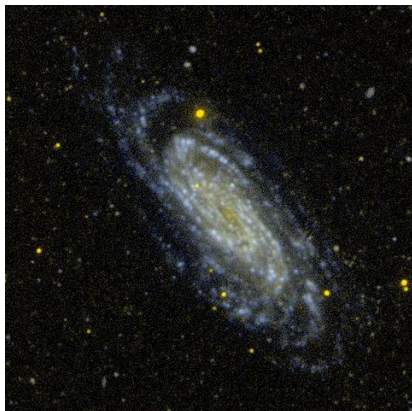


An der Rotationskurve ist deutlich sichtbar, wo die Kugel aufhört und freie Kreisbewegung (Keplerbewegung) beginnt.

Allgemeinere Auswertung: radialsymmetrische Verteilung rekonstruierbar

Newton'sche Gravitation

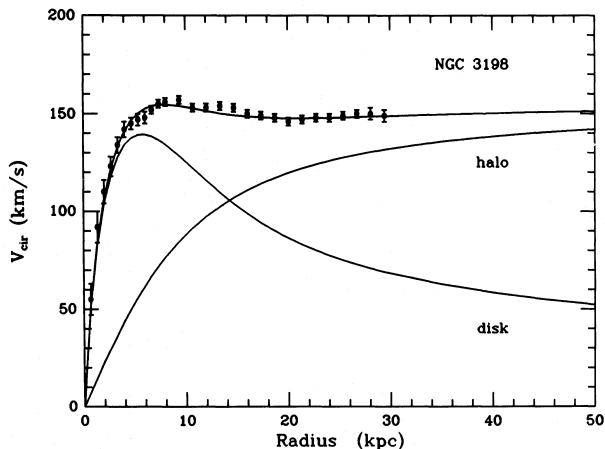
NGC 3198: Spiralgalaxie, die wir geneigt sehen, Durchmesser rund 75 Mio. Lichtjahre



Galex-Aufnahme im UV. Bild: NASA via Wikimedia Commons

Newton'sche Gravitation

Ableitung aus Rotationsbewegung im Vergleich mit der sichtbaren Masse, NGC 3198 (van Albada et al. 1985):



Vielteilchensysteme

Noch einmal unsere Kreisbahn mit Keplers drittem Gesetz:

$$T^2 = a^3 \frac{4\pi^2}{GM}, \quad v = \frac{2\pi a}{T}.$$

Betrachte kinetische und potentielle Energie des kreisenden Teilchens,

$$E_{kin} \equiv \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{und} \quad E_{pot} \equiv -\frac{GMm}{a}.$$

Einsetzen des 3. Kepler ergibt

$$E_{kin} = -\frac{1}{2}E_{pot}.$$

Das lässt sich verallgemeinern!

Vielteilchensysteme

Das **Virialtheorem** besagt: für ein stabiles System aus Teilchen, die sich unter Einfluss ihrer gegenseitigen Schwerkraft bewegen, gilt

$$\langle E_{kin} \rangle = -\frac{1}{2} \langle E_{pot} \rangle.$$

(Notation: $\langle A \rangle$ ist der zeitliche Mittelwert von A .)

Virialsatz für Galaxienhaufen

Galaxiengeschwindigkeiten weichen von Gesamtgeschwindigkeit im Mittel ab um σ :
Geschwindigkeitsdispersion

Virialtheorem sagt näherungsweise:

$$\sigma^2 = \frac{GM}{R}$$

mit M Gesamtmasse, R Ausdehnung des Haufens.

R aus Entfernung und Größe am Himmel erschließbar, σ aus Dopplereffekt messbar
⇒ Abschätzung von M



Galaxienhaufen Abell 2218. Bild: Andrew Fruchter (STScI) et al., WFPC2, HST, NASA

Virialsatz und dunkle Materie



Bild: NASA, ESA, and the Hubble Heritage Team (STScI/AURA).

Fritz Zwicky 1933 über den Coma-Haufen:

Um, wie beobachtet, einen mittleren Dopplereffekt von 1000 km/sek oder mehr zu erhalten, müsste also die mittlere Dichte im Comasystem mindestens 400 mal grösser sein als die auf Grund von Beobachtungen an leuchtender Materie abgeleitete¹⁾. Falls sich dies bewahrheiten sollte, würde sich also das überraschende Resultat ergeben, dass dunkle Materie in sehr viel grösserer Dichte vorhanden ist als leuchtende Materie.

Numerische Simulation

n -Körper-Probleme (*n body simulation*): Massenpunkte, die aufeinander Kräfte ausüben, z.B. Gravitation mit

$$\vec{F}_i = Gm_i \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^2} \vec{e}_{ij}$$

ist die Kraft auf den i -ten Massenpunkt, \vec{x}_j Ort des j -ten Teilchens, m_j Masse des j -ten Teilchens, \vec{e}_{ij} Richtungsvektor vom Teilchen i zum Teilchen j .

Daraus in Zeitschritten:

$$\vec{x}_i(t + \Delta t) = \vec{x}_i(t) + \vec{v}_i(t) \cdot \Delta t,$$

$$\vec{v}_i(t + \Delta t) = \vec{v}_i(t) + \frac{1}{m_i} \cdot \vec{F}_i(t) \cdot \Delta t.$$

Beispiel: Galaxien-Simulationen

Ausgangspunkt: Spiralgalaxien als bestimmte Dichte-Anordnung von Sternen (= Teilchen der Simulation, bis auf Gesamtzahl)



Bild: ESO/PESSTO/S. Smartt

Beispiel: Galaxien-Simulationen

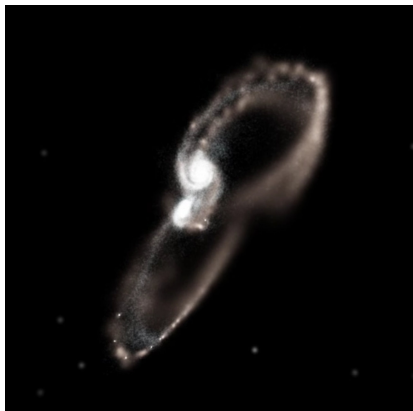


Bild: NASA / ESA

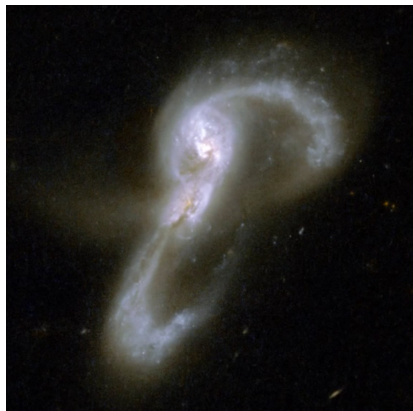


Bild: NASA / ESA

Links Simulation, rechts Weltraumteleskop Hubble. Video dazu:
<https://youtu.be/D-0GaBQ494E>

Beispiel: Galaxien-Simulationen

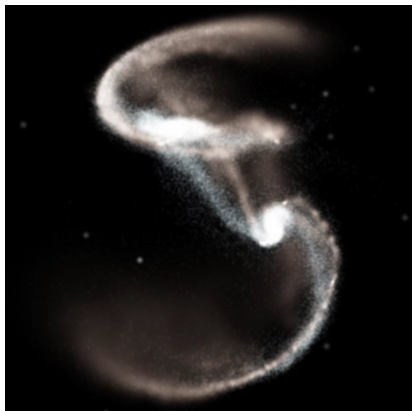


Bild: NASA / ESA



Bild: NASA / ESA

Links Simulation, rechts Weltraumteleskop Hubble. Video dazu:
<https://youtu.be/D-0GaBQ494E>

Gravitation und Stabilität von Objekten

Grundproblem: Objekte besitzen eine Eigenschwerkraft –
Regionen in ein und demselben Objekt ziehen einander an.

Stabilisierungsmechanismen: Hinreichend stabile Bindungen
(Festkörper; inklusive elektrischer Abstoßung der Atome),
thermischer Gegendruck (Sterne), ab einem bestimmten
Zeitpunkt: Pauli-Prinzip.

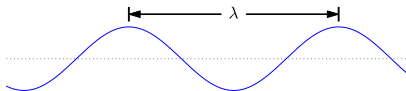
Gibt es prinzipielle Grenzen? Wie groß können Objekte werden?
Wie kompakt (Kompaktheit = Masse durch Durchmesser)?

Erst einmal: Festkörper

Vom Atom zum Festkörper

[nach Victor Weisskopf, „Of Atoms, Mountains and Stars“ in Science 187 (1975), 605– 612]

Für Quantenteilchen (Elektronen, Protonen, ...) gilt wie für Licht:
Welle *und* Teilchen.



Energie-Gleichung:

$$E = h\nu$$

Impuls-Gleichung:

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

Vom Atom zum Festkörper

Grundfrage: Was passiert, wenn man Quantenteilchen einsperrt/lokalisiert?

Vereinfacht: Größte Wellenlänge, die man in eine Zelle der Größe d einsperren kann, ist $\lambda = 2d$.

(Genauer: Potentielle Energie, Potentialtöpfe mit Randbedingungen)

Vom Atom zum Festkörper: Minimal-Energie

Auf Region der Ausdehnung d lokalisiertes Teilchen der Masse m hat Maximal-Wellenlänge

$$\lambda_{max} = 2d,$$

daher einen Minimal-Impuls und daraus folgende eine minimale (kinetische) Energie

$$E_{kin,min} \sim \frac{h^2}{md^2}.$$

(numerische Vorfaktoren bei solchen Rechnungen nicht allzu ernst nehmen)

Vom Atom zum Festkörper: Teilchendruck

Allgemeine Definition von Druck P : mit V Volumen und E (innerer) Energie z.B. eines Gases gilt

$$\Delta E = -P \cdot \Delta V \quad \Rightarrow \quad P = -\frac{dE}{dV}.$$

Ausgerechnet:

$$P \sim \frac{h^2}{m} \cdot V^{-5/3} = \frac{h^2}{m d^5}.$$

Entartungsdruck von Quanten

Pauli-Prinzip: Zwei Teilchen können nicht in exakt dem gleichen Quantenzustand sein.

Vereinfachte Vorstellung: N Teilchen in einem Volumen $V \Rightarrow$ jedes Teilchen bekommt sein eigenes privates Volumen $\nu = V/N$.

Entartungsdruck: Mit $\nu = d^3$,

$$P_E \sim \frac{h^2}{m} \left(\frac{N}{V} \right)^{5/3}$$

$$\left[\text{Exakte Rechnung: } P_E = \frac{3^{2/3}}{20 \pi^{4/3}} \cdot \frac{h^2}{m} \left(\frac{N}{V} \right)^{5/3} \approx 0.05 \frac{h^2}{m} \left(\frac{N}{V} \right)^{5/3} \right]$$

Bohr-Atom

Elektronen-Quantenwelle in Umlaufbahn um Proton:

Größte Wellenlänge $\lambda = 2\pi r$

\Rightarrow Minimalimpuls $p_{min} = h/2\pi r$

\Rightarrow minimale kinetische Energie

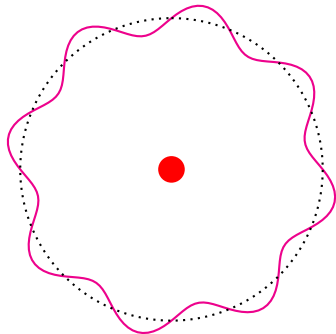
$$E_{kin} = h^2/2m(2\pi)^2 r^2$$

Energetisch günstigster Zustand (kinetische + potenzielle Energie):

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 h^2}{(2\pi)^2 e^2 m_e} \approx 5 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

mit

$$E_{ryd} = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \approx -2.17987217572 \cdot 10^{-18} \text{ J} = -13.6 \text{ eV.}$$



Größe von Atomen

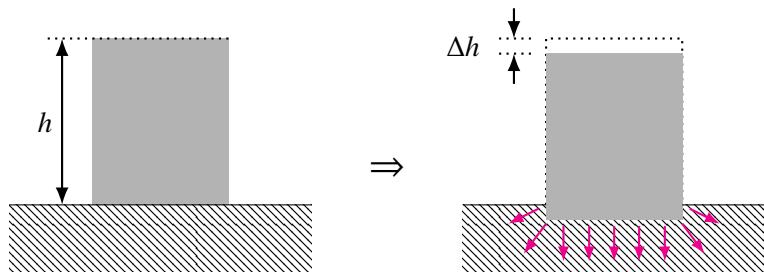
Bohrscher Radius $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2 / (2\pi)^2 e^2 m_e \Leftrightarrow$ Größe von Atomen

Rydberg-Energie $|E_{ryd}| = me^4 / 8\epsilon_0^2 \hbar^2 \Leftrightarrow$ Bindungsenergien von (äußeren) Elektronen in Atomen

Abschätzungen für atomare/molekulare Größen (nach Weisskopf op.cit):

Atomgrößen	$(1 \dots 6) \cdot a_0$
Ionisationsenergien	$(0.25 \dots 1) \cdot E_{ryd}$
Dissoziationsenergie Molekül	$(0.2 \dots 0.5) \cdot E_{ryd}$
Bindungsenergie Moleküle/Atom	$(0.1 \dots 0.3) \cdot E_{ryd}$ (Festkörper) $(0.05 \dots 0.1) \cdot E_{ryd}$ (Flüssigkeit)

Ab wann ist ein Körper rund?

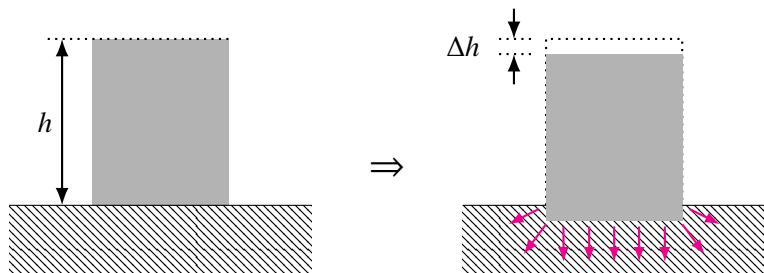


Wenn Berg der Höhe h und Grundfläche F um Δh in den Boden versinkt:

Potentielle Energiedifferenz $\Delta E_{pot} = \Delta m \cdot g \cdot h = \rho F \Delta h \cdot g \cdot h$

mit $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ der Schwerebeschleunigung auf der Erdoberfläche.

Ab wann ist ein Körper rund?

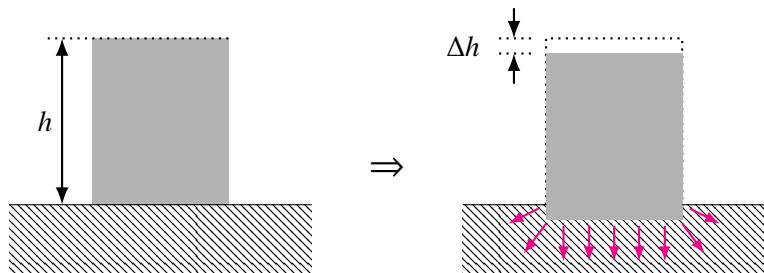


Energie nötig, um an der Basis Volumen von $F \cdot \Delta h$ zu verflüssigen, um es aus dem Weg zu räumen:

$$\Delta E_{form} = \gamma \cdot E_{ryd} \cdot N$$

mit $\gamma < 1$ dem Verhältnis von Schmelz- zu Ionisierungsenergie und N Anzahl der betroffenen Atome/Moleküle.

Ab wann ist ein Körper rund?



Anzahl der Atome/Moleküle:

$$N = n \cdot F \cdot \Delta h = \frac{\rho}{m_{part}} \cdot F \cdot \Delta h$$

Für den Grenzfall $\Delta E_{pot} = \Delta E_{form}$ ist mit $m_{part} = N_{part} \cdot m_p$

$$h_{max} = \gamma \frac{E_{ryd}}{m_{part} g} = \gamma \cdot \frac{m_e}{m_p} \frac{e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{g N_{part}} = \frac{\gamma}{N_{part}} \cdot 1.3 \cdot 10^5 \text{ km}$$

Ab wann ist ein Körper rund?

Werte für γ : Schmelzwärmen

Material	Schmelzwärme
Eis/Wasser	$334 \text{ kJ/kg} = 1.0 \cdot 10^{-20} \text{ J/Molekül} = 0.004 \cdot E_{ryd}/\text{Molekül}$
Aluminium	$398 \text{ kJ/kg} = 1.8 \cdot 10^{-20} \text{ J/Molekül} = 0.008 \cdot E_{ryd}/\text{Molekül}$
Gold	$63 \text{ kJ/kg} = 2.1 \cdot 10^{-20} \text{ J/Molekül} = 0.010 \cdot E_{ryd}/\text{Molekül}$
Blei	$25 \text{ kJ/kg} = 8.7 \cdot 10^{-20} \text{ J/Molekül} = 0.004 \cdot E_{ryd}/\text{Molekül}$
Eisen	$268 \text{ kJ/kg} = 2.5 \cdot 10^{-20} \text{ J/Molekül} = 0.012 \cdot E_{ryd}/\text{Molekül}$

$\Rightarrow \gamma = 0.004 \dots 0.01$

Wie groß kann ein Berg auf der Erde werden?

Quarz/Sand SiO_2 : $N_{part} = 28 + 2 \cdot 16 = 60$

Feldspate: $N_{part} = 188 \dots 377$

⇒ maximale Berghöhe auf der Erde:

$$h_{max} = \frac{0.004 \dots 0.01}{60 \dots 377} \cdot 1.3 \cdot 10^5 \text{ km} = (1.4 \dots 22) \text{ km}$$

Wie ist es auf anderen Planeten?

Allgemein: Massekugel mit Masse M , Radius R ,
Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche g :

$$g \equiv \frac{GM}{R^2} = \frac{4}{3}\pi\rho GR = g_{\oplus} \left(\frac{\rho}{\rho_{\oplus}}\right) \left(\frac{R}{R_{\oplus}}\right)$$

mit $\rho_{\oplus}, R_{\oplus}$ dem Dichte- bzw. Radiuswert für die Erde

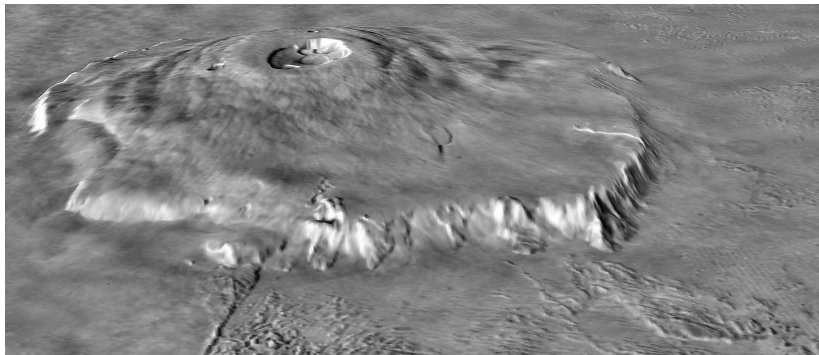
$$\Rightarrow h_{max} = \frac{4}{3}\pi\rho G \cdot R = \frac{\gamma}{N_{part}} \left(\frac{\rho_{\oplus}}{\rho}\right) \left(\frac{R_{\oplus}}{R}\right) \cdot (1.3 \cdot 10^5 \text{ km})$$

Höhe von Bergen: Mars

z.B. Mars, $\rho_{Mars} = 0.71 \rho_{\oplus}$, $R_{Mars} = 0.53 R_{\oplus}$:

$$\Rightarrow h_{max,Mars} = (3.7 \dots 58) \text{ km.}$$

vgl. höchsten Berg auf dem Mars: Olympus Mons, Höhe 22 km.



3D-Rekonstruktion Mars Global Surveyor und Viking-Aufnahme. Bild: NASA/MOLA Science Team

Form von Kleinobjekten

Ab wann können „Berge“ so hoch werden wie das astronomische Objekt groß ist?

Grenzfall $h_{max} = R$:

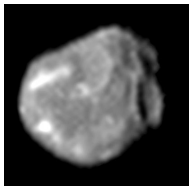
$$R = \sqrt{\frac{\gamma}{N_{part}} \left(\frac{\rho_{\oplus}}{\rho} \right)} \cdot (3 \cdot 10^4 \text{ km}) = \sqrt{\frac{\rho_{\oplus}}{\rho}} (95 \dots 375) \text{ km}$$

(rechter Ausdruck wieder für Gesteine, wie oben für die Erde)

Extremfall Styropor, $\rho = 15 \text{ kg/m}^3 = 0.003 \rho_{\oplus}$:

$R = (1805 \dots 7000) \text{ km}$

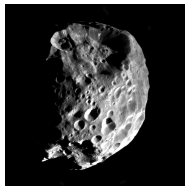
Form von Kleinobjekten



Jupitermond
Amalthea, $R = 84$ km
Bild: NASA/JPL/Cornell
University



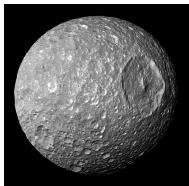
Saturnmond Janus,
 $R = 90$ km
Bild: NASA/JPL/Space
Science Institute



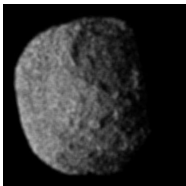
Saturnmond Phoebe,
 $R = 120$ km
Bild: NASA/JPL/Space
Science Institute



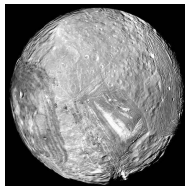
Saturnmond Hyperion,
 $R = 133$ km
Bild: NASA/JPL/Space
Science Institute



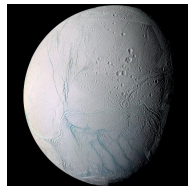
Saturnmond Mimas,
 $R = 200$ km
Bild: NASA/JPL/Space
Science Institute



Neptunmond Proteus,
 $R = 210$ km
Bild: NASA/JPL



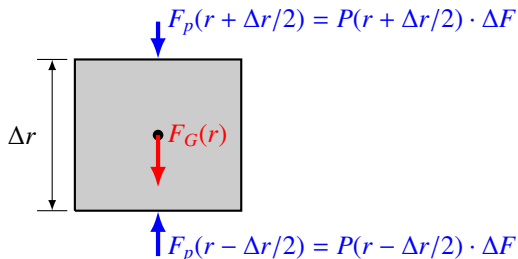
Uranusmond Miranda,
 $R = 236$ km
Bild: NASA/JPL-Caltech



Saturnm. Enceladus,
 $R = 250$ km
Bild: NASA/JPL/Space
Science Institute

Wie groß kann ein festes Objekt werden?

Einfaches Modell: Kugel. Betrachte kleines Volumenelement der Höhe Δr , Fläche (quer dazu) ΔF , es wirken Gravitationskraft F_G und Druckkräfte F_P von oben und von unten:



Ergibt eine Grundgleichung

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$$

Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$$

Vereinfachte Lösung für Festkörper: Annehmen, dass Dichte ρ konstant ist, insbesondere also

$$M(r) = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Damit lässt sich die Grundgleichung lösen und man erhält

$$P(r) = \frac{2}{3}\pi G\rho^2(R^2 - r^2).$$

Alternativ: Umschreiben in Abhängigkeit von der Gesamtmasse M :

$$P(r) = \frac{3}{8\pi^2} \frac{GM^2}{R^4} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

Stabilitätsbedingung

Stabil ist ein solches Objekt nur, wenn es einen Mechanismus gibt, der den nötigen Gegendruck erzeugen kann, insbesondere den Maximaldruck $P(0)$ im Zentrum,

$$P(0) = \frac{3}{8\pi^2} \frac{GM^2}{R^4}.$$

In einem Festkörper ist der Gegendruck letztlich der Entartungsdruck der Elektronen, siehe oben:

$$P_E = \frac{3^{2/3}}{20\pi^{4/3}} \cdot \frac{h^2}{m_e} \left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}.$$

Stabilitätsbedingung

Drückt man Entartungsdruck durch Masse und Radius aus, dann erhält man eine Bedingung für den maximalen Radius von

$$\begin{aligned} R &= \frac{(3/2)^{4/3}}{10\pi} \frac{h^2}{Gm_e(\mu m_p)^{5/3} M^{1/3}} \\ &= \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1/3} \left(\frac{\mu}{2}\right)^{-5/3} 4000 \text{ km} = \left(\frac{M}{M_\oplus}\right)^{-1/3} \left(\frac{\mu}{2}\right)^{-5/3} 3 \cdot 10^5 \text{ km} \end{aligned}$$

Erdähnliche (terrestrische) Planeten

$$R = \sqrt{\frac{3^{5/3}}{40\pi^{4/3}}} \cdot \frac{h}{\sqrt{Gm_e(\mu m_p)^{5/3}\rho^{1/3}}} = 57\,000 \text{ km} \left(\frac{\rho}{1000 \text{ kg/m}^3}\right)^{-1/6} \left(\frac{\mu}{2}\right)^{-5/6}$$

und mit Dichtewert für die Erde,
 $\rho = 5500 \text{ kg/m}^3$,

$$R_{max} = 43\,000 \text{ km} \sim 7 R_{\oplus}.$$



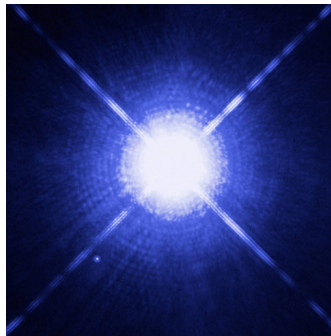
Bild: NASA/ GSFC/ NOAA/ USGS

Weißer Zwerge

Gleiche Stabilitätsformel für eine Sonnenmasse ($\mu \approx 2$):

$$R \approx 4000 \text{ km} = 0.6 R_{\oplus}$$

(genauere Rechnung führt auf $0.9 R_{\oplus}$):
Weißer Zwerg(stern), nach Verbrauch seines Kernbrennstoffs durch eigenes Elektronengas stabilisiert!



Sirius A mit Sirius B. Bild: NASA, ESA, H. Bond (STScI) and M. Barstow (University of Leicester)

Relativistischer Fall, $E = pc$

Entartungsdruck $\sim R^{-4}$, wie beim Zentraldruck – von R unabhängige Bedingung für M : Entartungsdruck kann den Stern stabilisieren, solange er größer als der Zentraldruck im Gleichgewicht ist.

Grenzmasse heißt *Chandrasekhar-Masse*, in unserer Überschlagsrechnung:

$$M_c = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{hc}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{(\mu m_p)^2} = \left(\frac{\mu}{2} \right)^{-2} \cdot 1.9 M_\odot.$$

Genauere Rechnung ergibt:

$$M_c = \left(\frac{2}{\mu} \right)^2 \cdot 1,4 \cdot M_\odot.$$

Das ist der obere Massenbereich für Weiße Zwerge (wichtig z.B. bei SN Ia)

Neutronensterne

Was, wenn die Elektronen nicht mehr stabilisieren können (Masse größer als Chandrasekhar-Masse)? Dann die gleiche Rechnung für Nukleonen, wie oben nur mit $N_e \rightarrow N_n$ und $m_e \rightarrow m_n \sim m_p$.
Ergebnis:

$$R = \frac{(3/2)^{4/3}}{10\pi^2} \frac{h^2}{G m_p^{8/3} M^{1/3}} = \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-1/3} \cdot 2 \text{ km}$$

Genauere Rechnung ergibt $R \sim 10 \text{ km}$

Ein Sternrest, so groß wie eine Großstadt!

Energetisch günstig: Protonen und Elektronen kombinieren zu Neutronen. Ergebnis: **Neutronenstern**

Fazit

Klassische Mechanik (Newton): Teilchen im eigenen Gravitationsfeld liefern Modelle für Planetensysteme, Sternhaufen, Galaxien, Galaxienhaufen

Elementare Quantenphysik liefert Größen-, Formen- und Massenabschätzungen für bestimmte astronomische Objekte.

Pauli-Prinzip wichtig zum Verständnis von Kleinkörpern vs. Planeten, Planetengrößen, Weißen Zwergen, Neutronensternen

Vorschau 1.12.2016

Nächster Vorlesungstermin: zweigeteilter Vortrag

Carolin Liefke (HdA) über Beobachtungspraxis mit Großteleskopen

Stefan Hippler (MPIA) Vertiefung zu Adaptiver Optik und deren praktischer Umsetzung